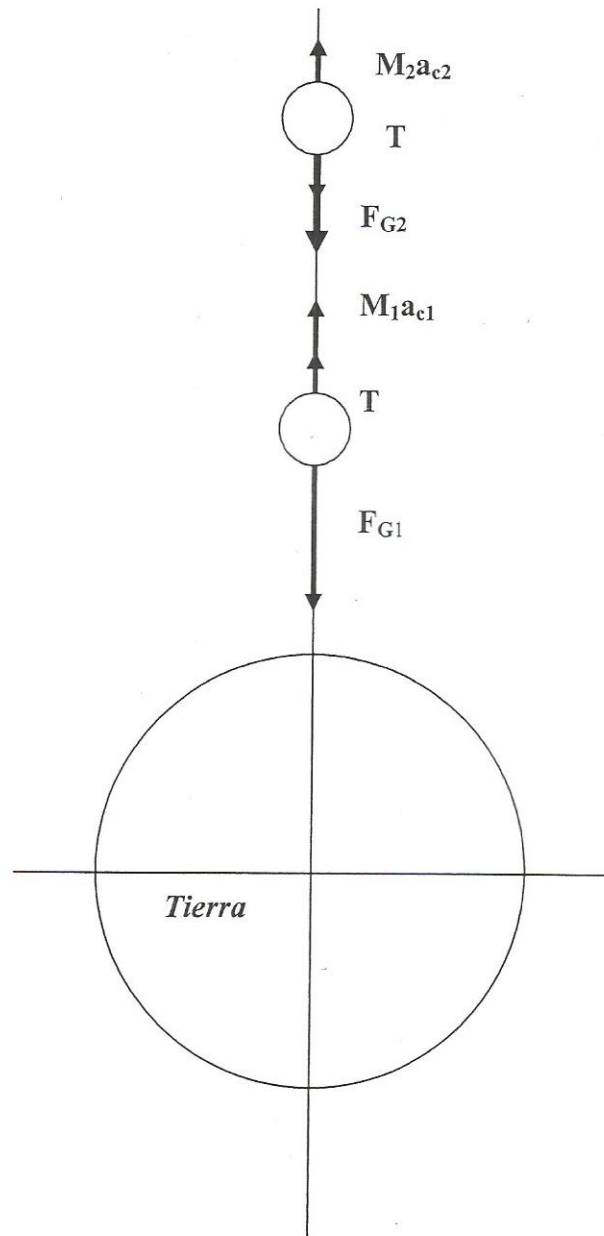


Solución Problema "Elevador Espacial Electrodinámico"

1-a) 1,5



Del diagrama de fuerzas, resulta que en el equilibrio valen las siguientes ecuaciones:
masa S_I

$$-MR_1 \omega_0^2 = T - \frac{GM_T M}{R_1^2} \quad (1)$$

Análogamente, para la masa S_2 se llega a

$$-MR_2 \omega_0^2 = -T - \frac{GM_T M}{R_2^2} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), resulta

$$\omega_0^2 M(R_1 + R_2) = GM_T M \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \quad (3)$$

Sea r_0 la coordenada radial del centro de masas:

$$r_0 = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_1 + \frac{L}{2} = R_2 - \frac{L}{2}$$

donde L es el largo del cable que une a los satélites. Entonces la ecuación (3) queda:

$$2\omega_0^2 r_0 = 2GM_T \left(\frac{r_0^2 + \frac{L^2}{4}}{\left(r_0^2 - \frac{L^2}{4} \right)^2} \right)$$

Luego:

$$\omega_0^2 = \frac{GM_T}{r_0} \left(\frac{r_0^2 + \frac{L^2}{4}}{\left(r_0^2 - \frac{L^2}{4} \right)^2} \right)$$

Esta expresión es válida como resultado presentado por los participantes. Sin embargo usando la aproximación indicada en el enunciado, dado que $L \ll r_0$ se llega a:

$$R_0 + \frac{L}{2} \approx R_0$$

$$\omega_0^2 \approx \frac{GM_T}{r_0^3} = 1 \times 10^{-6} \text{ } 1/s^2$$

y en consecuencia,

$$\omega_0 \approx 1 \times 10^{-3} \text{ } 1/s$$

1-b)

La tensión T puede obtenerse de la expresión (1) o (2):

$$T = M \left(r_0 + \frac{L}{2} \right) \frac{GM_T}{r_0^3} - \frac{GM_T M}{\left(r_0 + \frac{L}{2} \right)^2} \approx \frac{3}{2} LM \omega_0^2 = 37,5 N$$

2) 1.0

La fuerza de gravedad artificial es igual a la diferencia entre la fuerza debida a la fuerza inercial y la fuerza de gravedad. Para una masa de prueba m , ubicada en el satélite superior, este valor es:

$$a) \text{ Gravedad artificial} = m \omega_0^2 R_2 - \frac{GM_T m}{R_2^2} \approx \frac{3}{2} m \omega_0^2 L$$

Nota para los líderes:

Para idéntica masa, ubicada en el satélite inferior, vale:

$$\text{Gravedad artificial} = m \omega_0^2 R_1 - \frac{GM_T m}{R_1^2} \approx -\frac{3}{2} m \omega_0^2 L$$

Esto significa que la gravedad artificial actúa **hacia arriba** por encima del centro de gravedad y **hacia abajo** por debajo del centro de gravedad.

3- a)

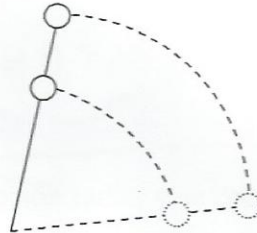
La fuerza electromotriz inducida sobre el conductor es (Ley de Faraday)

115

$$E = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}$$

en donde Φ_B representa el flujo magnético.

En su movimiento a través del campo magnético terrestre, el conductor que forma el EEE, barre un área por unidad de tiempo de



$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} R_2^2 \omega_0 - \frac{1}{2} R_1^2 \omega_0 = \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \omega_0 \\ &= L r_0 \left(\frac{GM_T}{r_0^3} \right)^{1/2} = L \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \end{aligned}$$

Entonces, el valor de la fuerza electromotriz E es:

$$E = B_0 L \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} = 7000 \text{ voltios}$$

La corriente inducida tiene una magnitud

$$i = \frac{E}{\rho} = \frac{B_0 L}{\rho} \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \approx 0,7 \text{ A}$$

Usando la expresión vectorial de la fuerza de Lorentz, se concluye que la **corriente electrónica es radial** y está dirigida hacia el centro de la Tierra.

Elect. $S2 \rightarrow S1$
Ans. $S1 \rightarrow S2$

$S1 \rightarrow S2$ conv.

1.0

0.25

0.25

3-b)

Usando la expresión

$$F = iL \times B_0$$

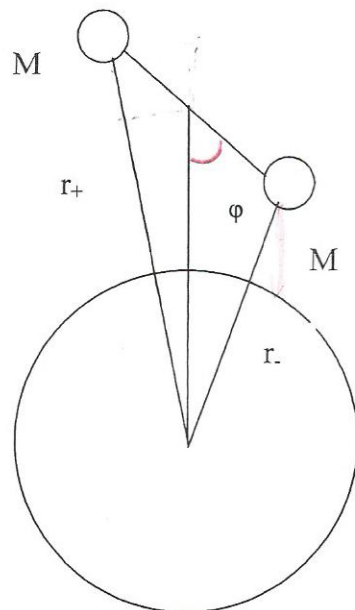
donde L es un vector radial de magnitud L , vemos que el módulo de la fuerza que actúa sobre la corriente i debida al campo magnético B_0 , es

$$F = \frac{B_0^2 L^2}{\rho} \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} = 0,7 N$$

La dirección de esta fuerza es perpendicular a la dirección radial y se opone al movimiento del sistema de masas.

3-c) Esto produce un frenado en el sistema de masas y por lo tanto un descenso de su órbita. Es proceso de frenado puede revertirse, si por medio de paneles solares, se aplica hace circular una corriente de sentido opuesto al anterior sobre el conductor del EEE.

4-a)



La energía potencial del sistema de masas es

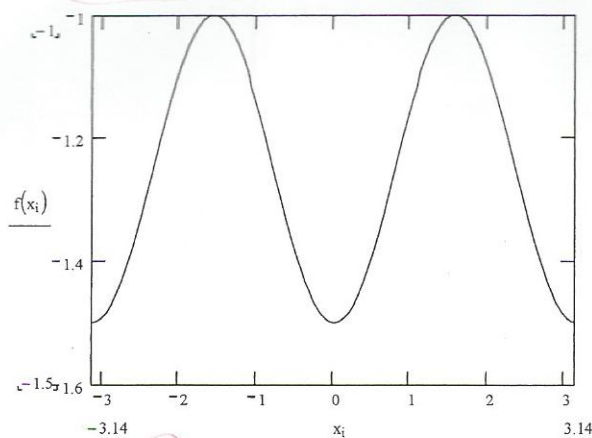
$$V(\varphi) = -GM_T M \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

donde

$$r_{\pm} = \sqrt{r_0^2 + \frac{L^2}{4} \pm L \cos \varphi} \approx r_0 \sqrt{1 \pm \frac{L}{r_0} \cos \varphi}$$

Entonces

$$V(\varphi) = -\frac{GM_T M}{r_0} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{L}{r_0} \right)^2 \cos^2 \varphi \right)$$



El mínimo estable ocurre en $\varphi = 0$.

4-b) Para pequeñas oscilaciones

$$\cos^2 \varphi \approx 1 - \varphi^2$$

y la energía total del sistema, respecto del centro de masa, es

$$E = 2 \times \frac{M}{2} \left(\frac{L \Delta \varphi}{2 \Delta t} \right)^2 + \frac{GM_T M}{r_0} \frac{3L^2}{4r_0^2} \varphi^2 + E_0$$

donde E_0 es una constante. En analogía con el oscilador armónico, concluimos que la frecuencia de oscilación alrededor del punto de equilibrio $\varphi=0$, es

$$\Omega^2 = \frac{\frac{3}{4} M \omega_0^2 L^2}{M \frac{L^2}{4}} = 3\omega_0^2$$

$\rightarrow \epsilon \propto \varphi^2$
 $\rightarrow \alpha = -k\varphi$
 1.0

1.0 + 1.0

ω

$$\omega = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\epsilon n_F}{r_0^3}}$$